

Wstęp

1 WIADOMOŚCI PODSTAWOWE

1.1. Zadania i metody wytrzymałości materiałów

Jak uczy doświadczenie, pod działaniem sił wszystkie ciała stałe odkształcają się. Niekiedy siły te mogą spowodować takie nieodwracalne zmiany kształtu, że ciało (ustrój, element maszyny) traci wartość użytkową i, jak mówimy, ulega ono *zniszczeniu*. Doświadczenie poucza również, że zjawiska odkształcenia i zniszczenia zależą od: 1) rodzaju materiału (stal, szkło itp.) i jego stanu (rodzaj obróbki mechanicznej, cieplnej, chemicznej); 2) kształtu i wymiarów ciała (wał maszyny, zbiornik gazu itp.); 3) rodzaju i wartości sił (ciśnienie gazu, ciężar itp.) i ich przebiegu w czasie (stałe lub zmienne); 4) innych oddziaływań (temperatura, promieniowanie itp.).

Wytrzymałość materiałów jest nauką o trwałości spotykanych w praktyce typowych elementów konstrukcji pod działaniem sił. Głównym jej zadaniem jest określenie *wytrzymałości* elementu, czyli odporności na zniszczenie, i jego *podatności*, czyli wartości i rodzaju odkształceń. Stosowane w tej nauce metody umożliwiają dokonanie stosunkowo prostych obliczeń dających ilościową ocenę wytrzymałości i podatności w stosunku do postawionych wymagań. Wymagania te zależą od przeznaczenia elementu. Na ogół sprawdzają się one do gwarancji *dostatecznego bezpieczeństwa* i *dostatecznej sztywności*, tzn. do tego, że w warunkach pracy nie nastąpi uszkodzenie elementu i że odkształcenia nie przekroczą wartości uniemożliwiających prawidłowe jego funkcjonowanie. Rozróżnia się przy tym zagadnienia: *kontroli* i *kształtowania*. Pierwsze z nich polegają na sprawdzeniu spełnienia powyższych wymagań w istniejącej konstrukcji. Drugie występują przy projektowaniu konstrukcji i polegają na takim doborze parametrów, z reguły wymiarów elementu, aby te wymagania były zachowane.

Podstawą wytrzymałości materiałów są przesłanki doświadczalne i teoretyczne. Pierwsze opisują własności materiałów, a w szczególności ich odkształcenie, w funkcji obciążeń przy różnych warunkach zewnętrznych. Drugie stanowią zastosowanie zasad mechaniki ogólnej, a przede wszystkim *praw statyki*, bez znajomości której *studiowanie wytrzymałości*

materiałów nie jest do pomyślenia. W odróżnieniu od mechaniki ogólnej, w wytrzymałości materiałów kładzie się główny nacisk na badanie odkształceń i prawie zupełnie pomija się zagadnienia ruchu ciała jako sztywnej całości.

Równolegle do wytrzymałości materiałów istnieją dyscypliny poświęcone podobnej problematyce jak: teoria sprężystości, teoria plastyczności, reologia. Szczególnie bliska wytrzymałości materiałów jest teoria sprężystości omawiająca w sposób bardziej ścisły te same w zasadzie zagadnienia, kosztem jednakże użycia złożonego aparatu matematycznego i żmudnych często rachunków. Te komplikacje ograniczają zastosowanie teorii sprężystości, pomimo że jej wyniki dają głębsze zrozumienie zjawisk. W odróżnieniu od tego, w nauce wytrzymałości materiałów kładziemy główny nacisk na stronę praktyczną i dla ułatwienia analizy godzimy się na stosowanie różnych metod przybliżonych bądź upraszczających założeń. Ich słuszność weryfikujemy porównując wyniki uproszczonej analizy z wynikami doświadczeń bądź z wynikami z teorii sprężystości. W ten sposób realizujemy to, co w wytrzymałości materiałów powinno być myślą przewodnią, a mianowicie, że środek ciężkości praktycznej analizy nie leży w stosowaniu złożonego aparatu matematycznego, lecz w analizie strony fizycznej zagadnienia, znalezieniu prawidłowych uproszczeń i doprowadzeniu do prostych ilościowych zależności.

1.2. Uproszczony model ciała

Podstawowe uproszczenia, o których mówiono poprzednio, dotyczą: 1) samego materiału, 2) opisu kształtu ciała. Wprowadzenie tych uproszczeń przekształca rzeczywisty obiekt w to, co nazywamy *schemat m obliczeniowym*, w którym zachowane zostają tylko istotne dla danego zagadnienia cechy obiektu.

Uproszczenia w opisie materiału są konieczne z racji trudności, jakie nasuwa rzeczywista budowa materii. Materiał każdego ciała składa się z atomów, między którymi działają siły. Obciążając ciało powodujemy stopniową zmianę odległości między atomami. Towarzyszy temu zmiana sił wzajemnego ich przyciągania aż do chwili osiągnięcia równowagi między obciążeniem a zmienionymi siłami międzyatomowymi. W swej więc istocie zjawiska wytrzymałościowe są molekularne i w takim ujęciu są omawiane w fizyce ciała stałego. W zagadnieniach inżynierskich takie ujęcie nie jest możliwe. Obiekty stosowane w technice zawierają $10^{20} \div 10^{30}$ atomów, a ich ustawienie wykazuje bardzo liczne odstępstwa od regularności. Jakakolwiek próba ilościowego ujęcia oddziaływań między poszczególnymi atomami jest skazana na niepowodzenie. Z tego powodu pojęciami cząstkowej budowy materiału będziemy się posługiwać dla zrozumienia zjawisk tylko od strony jakościowej.

W wytrzymałości materiałów odstępujemy nie tylko od atomu jako obiektu ilościowych badań, lecz zaniedbujemy także właściwości ich mikrostruktury. Jak wiadomo, poza materiałami bezpostaciowymi (szkło, plastyki), w których ustawienie atomów uważamy za chaotyczne, istnieją materiały polikrystaliczne, na przykład metale, w których mikrokryształy (ziarna) mają względnie regularną budowę atomową. Własności fizyczne pojedynczego ziarna, którego wymiary w metalach są rzędu 0,01 mm, są różne w różnych

kierunkach. Jeśli jednak elementarny obiekt jest kostką o wymiarach kilkunastokrotnie większych od wymiarów ziarna, to wspomniana różnokierunkowość gubi się, gdyż ustawienie ziaren w tej kostce jest chaotyczne. Własności takiej elementarnej kostki są uśrednione i są takie same w różnych miejscach ciała. Idealizując to zakładamy, że materiał ciała jest *jednorodny* i że każda, nawet nieskończenie mała, kostka ma takie same własności fizyczne.

Z pojęcia jednorodności wynika, że w uproszczonym modelu materia wypełnia objętość ciała w sposób ciągły. Przy opisie takiego ciała można stosować pojęcia i cały aparat analizy matematycznej, jak różniczkowanie i całkowanie.

Aby takie jednorodne ciało opisywało prawidłowo zjawiska, jego właściwości muszą być takie same jak uśrednione własności ciała rzeczywistego. Jedną z nich jest ta, że wywołane obciążeniem odkształcenia znikają całkowicie lub częściowo po odciążeniu. Tę właściwość ciała nazywamy *sprężystością*. Jeśli ten powrót do pierwotnego kształtu jest całkowity, to ciało nazywamy *idealnie sprężystym*, jeśli jest niecałkowity, to ciało nazywamy *częściowo sprężystym*. Odkształcenia znikające po odciążeniu nazywamy *sprężystymi*, podczas gdy pozostające po odciążeniu noszą nazwę odkształceń *trwałych* lub *plastycznych*. Przeciwnością ciała idealnie sprężystego jest ciało *idealnie plastyczne*, nie mające odkształceń sprężystych. Rzeczywiste ciała nigdy nie są ani idealnie sprężyste, ani idealnie plastyczne, aczkolwiek odstępstwa od jednego lub drugiego ideału mogą być znikome. Okazuje się z doświadczeń, że w pewnych przedziałach obciążenia zależnych od rodzaju, stanu i temperatury materiału takie materiały, jak stale i większość stopów metali, szkło, drewno, beton, można traktować jako idealnie sprężyste. Z uwagi na techniczne znaczenie *większość zagadnień wytrzymałości materiałów rozpatruje się przy założeniu idealnej sprężystości materiału*.

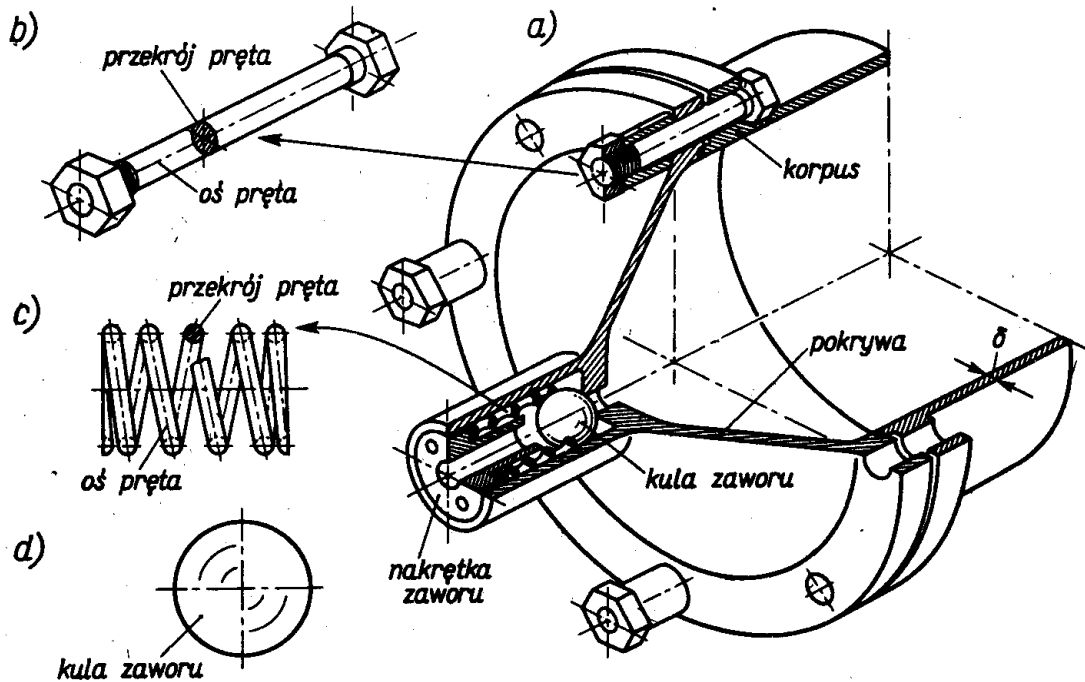
Przy obciążaniu ciała i narastającym odkształceniu obciążenia te wykonują pewną pracę zużytą na zmianę odległości między atomami i związaną z tym zmianę energii potencjalnej cząstek. Ta tak zwana *energia odkształcenia* jest zwracana w procesie odciążania. Codziennym przykładem tego procesu jest sprężyna zegarka, która przy odkształceniu („nakręcanie zegarka”) akumuluje w sobie energię oddawaną następnie na pokonanie oporów ruchu, gdy sprężyna wraca do pierwotnego kształtu. W takim energetycznym ujęciu ciałem idealnie sprężystym jest to, w którym praca zwrócona w procesie odciążania jest równa pracy włożonej przy obciążaniu ciała. Jeśli praca zwrócona jest mniejsza niż włożona, to ciało jest częściowo sprężyste. Różnica między tymi wielkościami zużyta zostaje na nieodwracalne zmiany w materiale, tj. trwałe jego odkształcenie.

Opierając się na wynikach doświadczeń, przyjmujemy dla większości materiałów (metale, plastyki itp.), że właściwości elementarnej kostki nie zależą od jej orientacji, tj. kąтового ustawienia w ciele. Takie materiały nazywamy *izotropowymi* (równokierunkowymi). Istnieją jednak i materiały *anizotropowe* (różnokierunkowe), jak na przykład drewno, gdzie uśrednione⁽¹⁾ właściwości elementarnej kostki są bardzo różne w zależności od jej orientacji w stosunku do kierunku słoików. Anizotropowe są i inne materiały, jak papier, tkaniny lub modne obecnie plastyki zbrojone włóknem szklanym, których anizo-

⁽¹⁾ To znaczy bez wnikania w komórkową budowę drewna.

tropia wynika z procesu technologicznego (papier) bądź, jak w tkaninach, z samej ich budowy. W większości zagadnień będziemy zajmować się materiałami izotropowymi.

Równoległe do uproszczeń dotyczących materiału wprowadzamy uproszczone modele geometryczne spotykanych w praktyce elementów. Rozpatrzmy to na przykładzie zbiornika ciśnieniowego (rys. 1.1a), w którym cienkościenny walcowy korpus zamknięty jest pokrywą



Rys. 1.1. Podział konstrukcji na typowe elementy

z kulowym zaworem bezpieczeństwa. Jak widać, elementy tej konstrukcji dają się podzielić na trzy grupy. Pierwsza z nich, tzw. *pręty*, obejmuje elementy takie jak śruby, sprężynę (rys. 1.1b, c), w których jeden wymiar, tj. długość, jest duży w porównaniu do dwóch pozostałych. Grupa druga, tzw. *powłoki*, reprezentowana przez korpus i pokrywę, to elementy, w których jeden wymiar, tj. grubość δ , jest mały w porównaniu z dwoma pozostałymi. Wreszcie do grupy trzeciej, tzw. *brył*, zaliczamy takie elementy, jak kulę zaworu, nakrętkę śruby, w których wszystkie wymiary są tego samego rzędu. W wytrzymałości materiałów zajmujemy się głównie prętami.

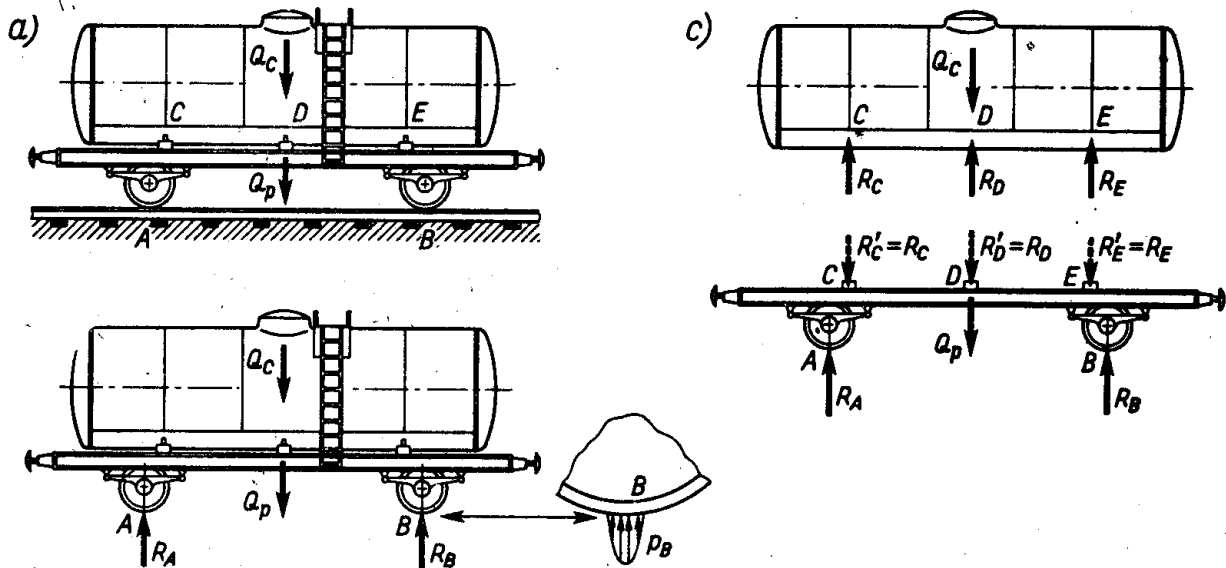
Powstanie pręta można przedstawić jako wynik ruchu środka ciężkości płaskiej figury wzdłuż pewnej linii w taki sposób, że figura ta w każdym punkcie jest prostopadła do tej linii. Tak zdefiniowaną linię nazywamy *osią pręta*, a płaską figurę *poprzecznym przekrojem pręta*. W zależności od kształtu osi może być pręt *prosty* (rys. 1.1b) lub *zakrzywiony*. Przykładem płasko zakrzywionego pręta jest pierścień tłokowy, przykładem przestrzennie zakrzywionego — sprężyna (rys. 1.1c). Sam przekrój pręta może być stały lub zmienny i przy ruchu wzdłuż osi może wykazywać obrót. W tym ostatnim przypadku mówimy, że pręt jest *naturalnie skręcony*. Technicznym przykładem takiego pręta jest wiertło spiralne.

Wprowadzona systematyka umożliwia analizę wytrzymałościową realnych obiektów według ograniczonej liczby schematów niezależnie od przeznaczenia danego elementu.

Takim jednolitym schematem można na przykład objąć wały maszyn przenoszące ruch obrotowy z jednego agregatu na drugi, niezależnie od tego, czy konkretne zadanie dotyczy wału napędzającego śrubę okrętową, czy też wrzeciono obrabiarki. Daje to ogromne uproszczenie rozważań.

1.3. Siły zewnętrzne i wewnętrzne

Miarą mechanicznego oddziaływania ciał na siebie są siły. Rozpatrując dane ciało izolowane od innych, pierwotnie z nim połączonych, zastępujemy ich działanie na to ciało siłami, które nazywamy *zewnętrznymi*. Siły zewnętrzne dzielimy na *objętościowe* i *powierzchniowe*. Pierwsze z nich działają na każdą cząstkę ciała, drugie przyłożone są tylko na jego powierzchni. Przykładem sił objętościowych są siły własnego ciężaru ciała, przykładem drugich jest ciśnienie cieczy otaczającej ciało lub ciśnienie w obszarach styku ciała badanego z innymi. Siłami zewnętrznymi dla danego ciała są nie tylko siły o znanej wartości, tzw. *siły czynne*, lecz i reakcje więzów, tzw. *siły bierne*, uzupełniające układ sił czynnych do układu będącego w równowadze. Biorąc dla przykładu wagon-cystrnę (rys. 1.2a, b) mamy tu siły czynne: ciężar zbiornika z cieczą Q_c i ciężar podwozia Q_p . Siłami biernymi są ciśnienia na powierzchniach styku kół A i B z szyną. Jak widać, wymiary powierzchni styku są bardzo małe w porównaniu z wymiarami wagonu. Gdy obiekt-



Rys. 1.2. Określenie obciążenia konstrukcji

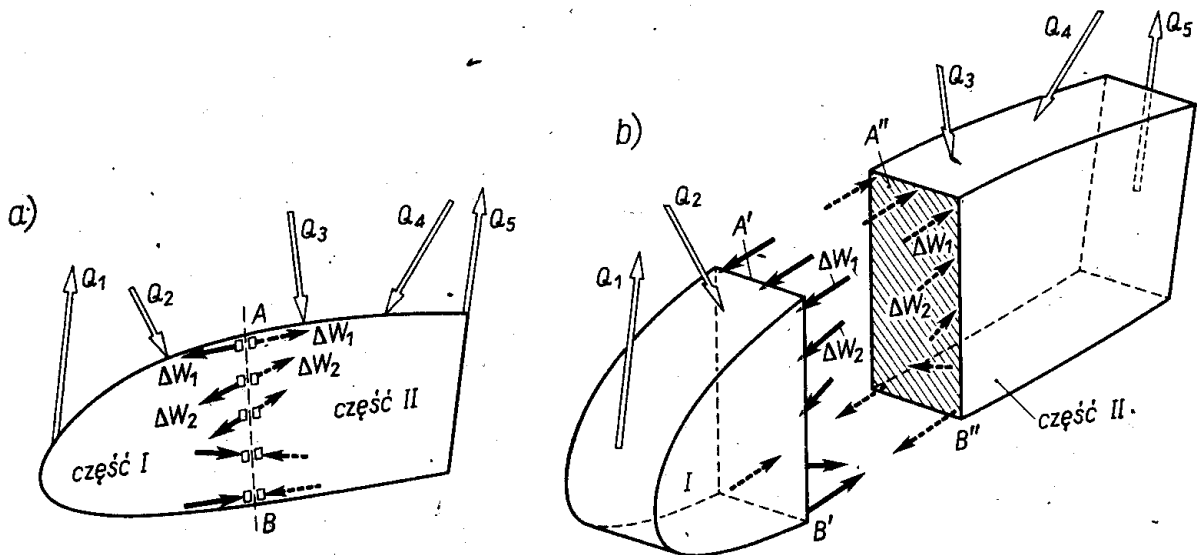
tem badanym jest cały wagon, wówczas ciśnienia te, jak p_B , można zastąpić⁽¹⁾ ich wypadkowymi *skupionymi siłami* R_A i R_B , które wyznaczamy z warunków równowagi. Cały zespół sił czynnych (Q_c i Q_p) oraz biernych (R_A i R_B) nazywamy *obciążeniem* obiektu.

⁽¹⁾ Taka idealizacja jest niedopuszczalna, gdy przedmiotem badania są zjawiska w samym polu styku i jego bezpośrednim otoczeniu, gdyż wtedy wymiary pola styku są rzędu wymiarów badanej części.

Postać obciążenia, tzn. liczba sił zewnętrznych, ich wartości i charakter, zależy przede wszystkim od tego, gdzie przebiega umowna granica między badanym obiektem a otoczeniem. Gdyby badanym obiektem był tylko zbiornik cysterny (rys. 1.2c), wówczas obciążenie stanowiłyby tylko jedna siła czynna Q_c i reakcje R_C, R_D, R_E podpór C, D, E zbiornika na podwoziu. W odróżnieniu od poprzedniego przypadku, reakcji R_C, R_D, R_E nie można obliczyć z będących do dyspozycji dwóch równań równowagi. Rozwiązanie takich zagadnień, tzw. statycznie niewyznaczalnych, wymaga zbadania odkształceń ustroju i jest omówione w rozdz. 10.

W odróżnieniu od sił zewnętrznych pochodzących od ciał nie należących do umownie określonego obiektu, wszystkie inne oddziaływania między częściami należącymi do danego obiektu nazywamy siłami wewnętrznymi. Mogą to być oddziaływania między poszczególnymi elementami obiektu, a biorąc ogólnie — między wszystkimi cząstkami ciała. Zgodnie z trzecim prawem Newtona (zasada działania i przeciwdziałania) siły te są zawsze parami przeciwne, tzn. że działają wzdłuż tej samej prostej, mają równe wartości bezwzględne, lecz przeciwne zwroty. Z tego powodu ich istnienia nie można wykryć z badania równowagi ciała jako jednej całości. Widać to z rys. 1.2c, gdy zbiornik i podwozie złączymy z powrotem, wtedy bowiem siły R_C, R_C', \dots stają się siłami wewnętrznymi dla całości, a ich działanie odpowiednio się kasuje.

Dla ujawnienia reakcji R_C, R_D i R_E konieczne było izolowanie zbiornika od podwozia przez myślowe przecięcie więzów (podpór). Tę samą metodę przecięć stosujemy dla ujawnienia wewnętrznych sił ΔW , wywołanych w danym ciele obciążeniem Q_1, \dots, Q_5 (rys. 1.3a).



Rys. 1.3. Ujawnienie sił wewnętrznych

Siły ΔW (ciągłe strzałki) działania cząstek części II na odpowiadające im cząstki części I; siły ΔW (przerwane strzałki) działania cząstek części I na cząstki części II.

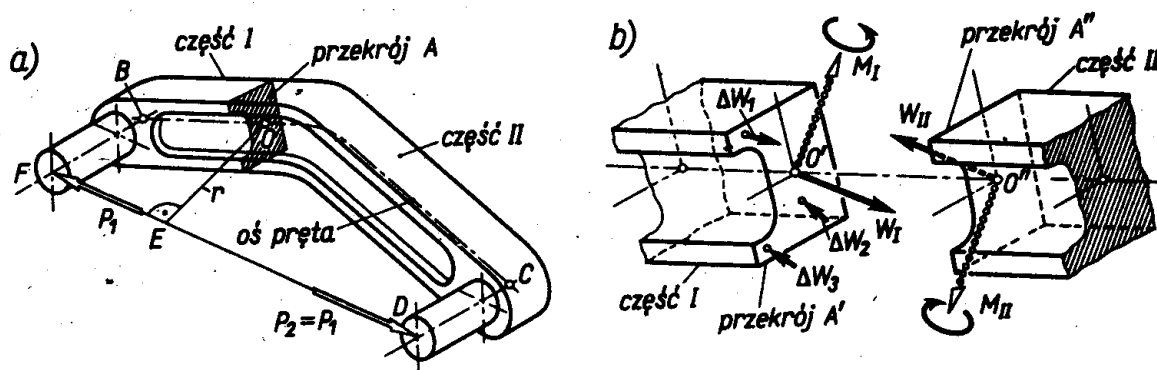
W tym celu ciało to rozcinamy myślowo przekrojem AB na dwie oddzielne części I i II przykładając w nowo powstałych przekrojach $A'B'$ i $A''B''$ takie układy sił $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots$, jakie istniały przed przecięciem (rys. 1.3b). Dzięki temu mamy obecnie dwa odrębne ciała I i II, z których każde oddzielnie jest w równowadze, albowiem obraz sił nie zmienił się,

z tym że układy sił ΔW są teraz odpowiednio dla części *I* i *II* siłami zewnętrznymi. Z uwagi na charakter sił ΔW jest rzeczą jasną, że znając układ sił ΔW dla części *I* znamy tym samym układ sił ΔW dla części *II*. Układy te, przy założonej jednorodności materiału, klasyfikujemy jako siły powierzchniowe rozłożone w sposób ciągły w przekrojach $A'B'$ i $A''B''$.

Opisaną metodą przecięć będziemy posługiwać się w całej nauce wytrzymałości materiałów.

1.4. Wysiłek przekroju pręta

Metodę przecięć zastosujemy obecnie do konstrukcji prętowej (rys. 1.4a), której myślowe rozcięcie, z reguły prostopadłe do osi pręta, uzewnętrznia w nowo powstałych przekrojach A' i A'' układ sił $\Delta W_1, \Delta W_2, \dots$ (rys. 1.4b). Wartości tych sił w poszczególnych punktach przekroju A' części *I* nie są znane. Jakże by jednak one nie były, można je zre-



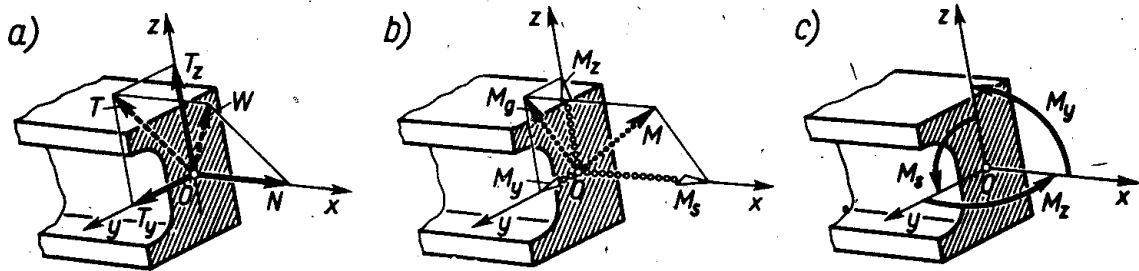
Rys. 1.4. Wysiłek przekroju konstrukcji prętowej

dukować do środka ciężkości O' tego przekroju. W wyniku otrzymamy, ogólnie biorąc, wypadkową siłę W_I i wypadkowy moment M_I . Ten zespół W_I i M_I nazwiemy *wysiłkiem przekroju A'* , a samą siłę W_I i moment M_I *elementami wysiłku* tegoż przekroju. Podobnie W_{II} i M_{II} związane z punktem O'' są elementami wysiłku przekroju A'' części *II*. Z własności sił ΔW wynika, że elementy W_{II} i M_{II} są odpowiednio przeciwne do elementów W_I i M_I .

Elementy wysiłku W_I i M_I , jako wypadkowe układu sił ΔW , zapewniają równowagę części *I*, jako odrębnego ciała. Aby tak było, siły W_I i P_1 muszą tworzyć parę sił, a moment M_I musi być przeciwny do momentu siły P_1 względem punktu O' , jego wektor zatem jest prostopadły do płaszczyzny OEF , ma wartość $P_1 r$, a zwrot jak na rys. 1.4b. Na ogół wyznaczenie wysiłku przekroju⁽¹⁾ nie jest tak proste i wymaga sformułowania

⁽¹⁾ Wprowadzone określenie „wysiłek przekroju” oddaje wiernie aktywną rolę przekroju w zapewnieniu równowagi badanej części ciała. Oddaje ono również to, że wynik redukcji sił ΔW jest zespołem wypadkowej siły W i wypadkowego momentu M . Pojęcie „wysiłek przekroju” ma swój odpowiednik w innych językach (ros. — *силовой фактор*, franc. — *effort*) i jest bardziej zwarte, niż używane dotychczas w naszej literaturze określenia „wypadkowa sił wewnętrznych w przekroju” lub „główny wektor sił wewnętrznych w przekroju i moment główny sił wewnętrznych w przekroju”.

równań równowagi. W takim przypadku wysiłek przekroju przedstawiamy nie przez wypadkową siłę W i wypadkowy moment M , lecz przez ich składowe w prostokątnym układzie x, y, z . Początek układu pokrywa się ze środkiem ciężkości badanego przekroju, oś x jest styczna do osi pręta, a osie y i z są do niej prostopadłe i leżą w płaszczyźnie prze-

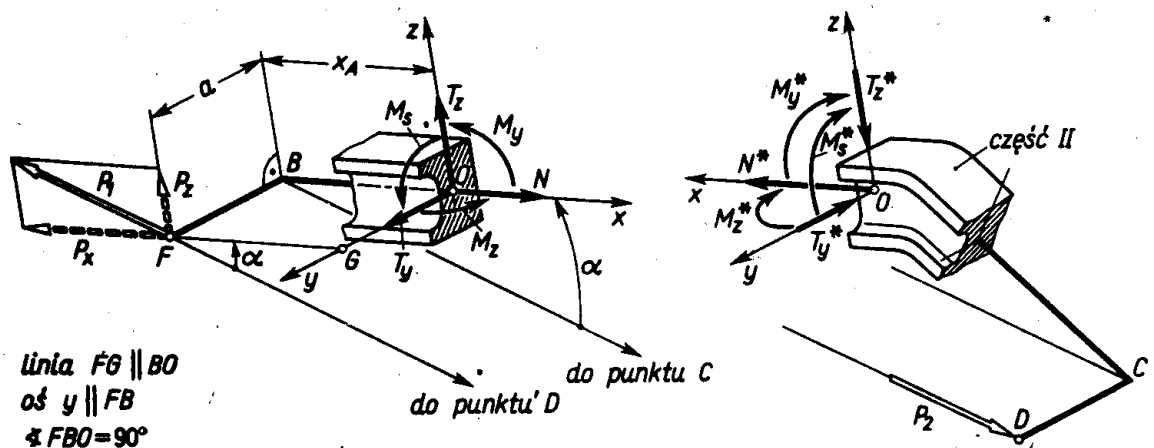


Rys. 1.5. Przedstawienie wysiłku przekroju przez składowe

kroju (rys. 1.5a). Składowe siły W na te osie są odpowiednio N, T_y, T_z . Składową N działającą wzdłuż osi pręta nazywamy siłą *wzdłużną* lub *normalną*, składowe T_y i T_z siłami *tnącymi* lub *poprzecznymi*. Niekiedy łączymy siły T_y i T_z w jedną wypadkową siłę tnącą T :

$$T = \sqrt{T_y^2 + T_z^2} \quad (a)$$

Rozkładając podobnie wektor momentu M na osie x, y, z mamy składowe momenty M_s, M_y, M_z (rys. 1.5b), z których pierwszy o wektorze pokrywającym się z osią pręta



Rys. 1.6. Określenie składowych wysiłku przekroju z równań równowagi

Ustrój z rys. 1.4 narysowano schematycznie zostawiając jedynie fragmenty w otoczeniu myślowego przekroju A .

nazywamy momentem skręcającym, pozostałe, tj. M_y i M_z , o wektorach prostopadłych do osi x nazywamy momentami gnącymi.⁽¹⁾ Niekiedy łączymy momenty M_y i M_z w jeden wypadkowy moment gnący M_g

$$M_g = \sqrt{M_y^2 + M_z^2} \quad (b)$$

⁽¹⁾ Często składowe momenty przedstawiamy zakrzywionymi strzałkami w płaszczyznach ich działania (rys. 1.5c). I tak moment M_y działa w płaszczyźnie xz , jego więc obrazem jest zakrzywiona strzałka w tej płaszczyźnie.

Dla wyznaczenia sześciu składowych wysiłku, tj. N , T_y , T_z , M_x , M_y , M_z , badanego przekroju formułujemy sześć równań równowagi badanej części konstrukcji (rys. 1.6), a mianowicie trzy równania równowagi sumy rzutów:

$$N + \sum P_x = 0, \quad T_y + \sum P_y = 0, \quad T_z + \sum P_z = 0, \quad (1.1)$$

oraz trzy równania równowagi momentów względem osi x , y , z :

$$M_x + \sum M_{xP} = 0, \quad M_y + \sum M_{yP} = 0, \quad M_z + \sum M_{zP} = 0, \quad (1.2)$$

gdzie P_x , P_y , P_z oznaczają odpowiednie składowe siły zewnętrznych na osie x , y , z , M_{xP} , M_{yP} , M_{zP} ich momenty względem odpowiednich osi, a sumowanie obejmuje *wszystkie* siły zewnętrzne (czynne i bierne) działające na część badaną. W konkretnym przypadku jedyną siłą zewnętrzną dla części I jest siła P_1 , której składowe na osie x , y , z są: $P_x = -P_1 \cos \alpha$, $P_y = 0$, $P_z = P_1 \sin \alpha$. Równania (1.1) i (1.2) przyjmują postać

$$N - P_1 \cos \alpha = 0, \quad T_y + 0 = 0, \quad T_z + P_1 \sin \alpha = 0, \quad (c)$$

$$M_x - P_z a = 0, \quad M_y - P_z x_A = 0, \quad M_z - P_x a = 0, \quad (d)$$

skąd mamy składowe wysiłku przekroju A' części I

$$\left. \begin{aligned} N &= P_1 \cos \alpha, & T_y &= 0, & T_z &= -P_1 \sin \alpha, \\ M_x &= P_1 a \sin \alpha, & M_y &= P_1 x_A \sin \alpha, & M_z &= P_1 a \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Ujemna wartość jakiejś składowej, np. T_z , oznacza, że w rzeczywistości ma ona zwrot przeciwny do założonego. Analogicznie możemy napisać równania (1.1) i (1.2) dla składowych N , T_y , ..., M_z wysiłku przekroju A'' części II . Potrzeba jednak taka nie istnieje, gdyż wiemy, że te składowe są przeciwne względem podanych wzorami (e). Wynika stąd, że wysiłek przekroju można wyznaczać z warunków równowagi jednej lub drugiej części myślowo rozciętej konstrukcji. Wniosek ten wykorzystujemy w obliczeniach pisząc równania (1.1) i (1.2) dla tej części, dla której mają one prostszą postać.

Przy formułowaniu równań (1.1) i (1.2) należałoby uwzględnić, że konstrukcja poddana obciążeniu jest odkształcona. Wpływałoby to na ustawienie sił zewnętrznych, położenie myślowego przekroju A i w wyniku odbiłoby się na wartościach P_x , ..., M_{zP} . W praktyce jednak okazuje się, że odkształcenia ciał są na ogół bardzo małe w porównaniu do pierwotnych wymiarów i z małym błędem (rzędu promille) możemy równania równowagi (1.1) i (1.2) formułować tak, jak gdyby obciążone ciało miało postać pierwotną. Powyższa reguła wymiarów początkowych stanowi zasadnicze założenie w większości zagadnień. Reguły tej nie stosuje się w zagadnieniach stateczności (rozd. 15) oraz w bardzo rzadkich przypadkach, gdy nawet małe odkształcenia zmieniają w istotny sposób pracę ustroju.

Istotna różnica między badaniem wysiłku przekroju w nauce wytrzymałości materiałów a badaniem równowagi ciała w statyce tkwi nie w metodzie, lecz w ilości. Badanie równowagi pewnego ciała (rys. 1.4a) na gruncie statyki polega na ogół na *jednokrotnym* wykonaniu tej czynności. W wytrzymałości materiałów chcemy znać dla tego samego ciała wysiłek nie jednego przekroju A , lecz szeregu przekrojów. Za każdym przy tym kolejnym rozcięciem mamy inny obiekt. Widać to z rys. 1.6, gdy zmieniamy odległość x_A , i z wzorów (e), gdzie M_y jest funkcją tej odległości. Ta odmienność podejścia jest koniecz-

na, gdyż od wysiłku przekroju zależą siły ΔW w punktach przekroju, a od nich z kolei zależy bezpieczeństwo.

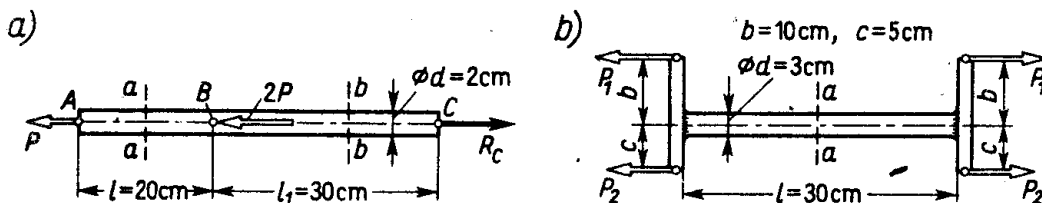
Przedstawienie wysiłku przekroju przez składowe N , T , M_s i M_g (rys. 1.5) umożliwia klasyfikację tzw. *prostych przypadków pracy pręta*. Jeśli w badanym przekroju istnieje tylko siła normalna N , to mówimy, że w tym przekroju pręt pracuje na *rozciąganie* lub *ściskanie*, zależnie od tego, czy siła N działa na zewnątrz, czy do wewnątrz badanej części pręta. Jeśli w przekroju działa tylko M_s , to mówimy, że w tym przekroju pręt pracuje na *skręcanie*. Wreszcie, gdy działa tylko moment M_g (wzór b), wówczas taki przypadek nazywamy *czystym zginaniem*. Te proste przypadki cechują się tym, że mogą one obejmować nie jeden przekrój, lecz wszystkie przekroje na odcinku pręta o *skończonej* długości. W odróżnieniu od tego, działaniu siły T towarzyszy zawsze pojawienie się momentu M_g w sąsiednich przekrojach. Z tego powodu działanie siły tnącej T traktujemy łącznie z istnieniem odpowiedniego M_g jako tzw. *zginanie poprzeczne*. Ten ostatni przypadek jest prostym przykładem tzw. *wytrzymałości złożonej*, do której zalicza się również przypadki jak na rys. 1.6.

Zadania

1. Na wałek (rys. 1.7a) działają wzdłuż osi wałka siły $P = 10$ kN, $2P = 20$ kN i równoważąca je reakcją R_C . Wyznaczyć wysiłek przekrojów $a-a$ i $b-b$.

Odp. $N_a = 10$ kN, $N_b = 30$ kN. Pozostałe składowe wysiłku równe zero.

2. Wałek z dwiema poprzeczkami (rys. 1.7b) obciążono równoważącymi się grupami sił $P_1 = P_2 = 5$ kN. Znaleźć wysiłek przekroju $a-a$ dla części wałka na lewo od tego przekroju.



Rys. 1.7.

Odp. Siła $N_a = 10$ kN (rozciągająca); moment $M_g = -250$ Nm (zwrot przeciwny niż na rys. 1.5c). Pozostałe składowe wysiłku równe zero.

3. Powtórzyć zadanie 2, gdy siły P_2 zmienią zwrot na przeciwny.

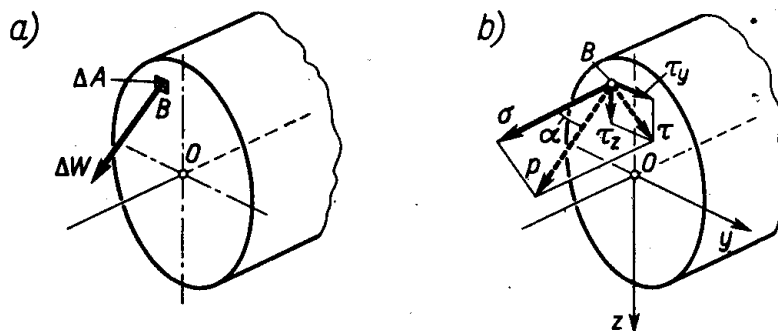
Odp. Wysiłek przekroju ma tylko składową $M_g = -750$ Nm.

4. W nauce statyki korzystamy często z twierdzenia, że „każdą siłę działającą na ciało sztywne można dowolnie przesuwać wzdłuż jej linii działania”. Czy to twierdzenie jest słuszne dla zagadnień wytrzymałości materiałów? Rozumowanie przeprowadzić na przykładzie (rys. 1.7a), raz – gdy siły P i $2P$ działają tak, jak to podano, drugi raz, gdy przy nie zmienionych P i R_C siła $2P$ jest przesunięta do punktu A .

Odp. Twierdzenie nie jest słuszne, albowiem przez zmianę punktu zaczepienia zmienia się wysiłek przekrojów. W konkretnym przykładzie wysiłek przekroju $a-a$ jest raz $N_a = P$, drugi raz $N_a = 3P$ i warunki pracy pręta na odcinku AB są inne niż poprzednio. Wynika stąd, że w zagadnieniach wytrzymałości materiałów nie wolno zmieniać punktów zaczepienia sił. Nieznajomość tego wniosku powoduje częste błędy u studentów.

1.5. Definicja naprężeń. Stan napięcia

Jak już powiedziano, wewnętrzne siły ΔW (rys. 1.3) rozłożone są w sposób ciągły na polu myślowego przekroju. Wielkość siły ΔW zależy więc od wielkości tego pola. Aby otrzymać właściwą miarę sił wewnętrznych na polu przekroju, wprowadzamy pojęcie



Rys. 1.8. Określenie naprężenia wypadkowego p i składowych σ i τ

natężenia tych sił, tzw. *naprężenie*. Jeśli w myślowym przekroju ciała (rys. 1.8a) na elementarne pole ΔA działa siła ΔW , to *średnim wypadkowym naprężeniem* p_{sr} nazwiemy wektor współkierunkowy z ΔW o wartości

$$p_{sr} = \Delta W / \Delta A. \quad (a)$$

Zmniejszając wymiary (szerokość i wysokość) pola ΔA mamy w granicy *wypadkowe naprężenie* p w punkcie B o wartości

$$p = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta A} \quad (1.3)$$

o kierunku i zwrocie takim jak elementarna siła ΔW . Podstawową jednostką naprężenia w przyjętym od 1966 r. w Polsce układzie jednostek SI (metr, kilogram masy, sekunda) jest *paskal* (Pa):

$$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2. \quad (b)$$

Dla praktycznych zastosowań jednostka ta jest zbyt drobna i dlatego posługujemy się wielokrotnością milion razy większą, tj. *megapaskalem* (MPa):

$$1 \text{ MPa} = 10^6 \text{ Pa} = 10^6 \text{ N/m}^2. \quad (c)$$

W używanym jeszcze przejściowo technicznym układzie jednostką naprężenia jest kilogram siły na kwadratowy centymetr. Jest ona związana z nowymi jednostkami zależnością

$$1 \text{ kG/cm}^2 = 0,0981 \text{ MPa} \approx 0,1 \text{ MPa}. \quad (d)$$

Pojęcie wypadkowego naprężenia stosujemy bardzo rzadko. Zazwyczaj posługujemy się jego składowymi (rys. 1.8b), z których składowa σ , prostopadła do przekroju,

$$\sigma = p \cos \alpha, \quad (1.4a)$$

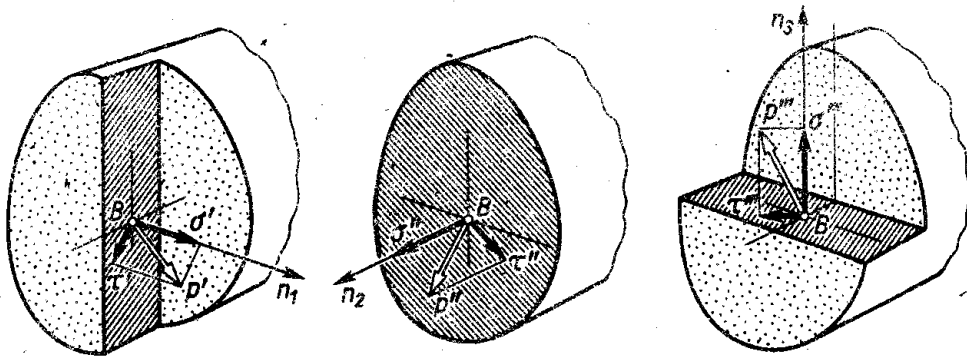
nosi nazwę *naprężenia normalnego*, podczas gdy druga składowa τ działająca w płasz-

czyżnie przekroju,

$$\tau = p \sin \alpha, \quad (1.4b)$$

nazywa się *naprężeniem stycznym*. To ostatnie rozkładamy z kolei na dwa składowe naprężenia styczne: τ_y i τ_z zorientowane w kierunkach osi y i z obranych na przekroju.

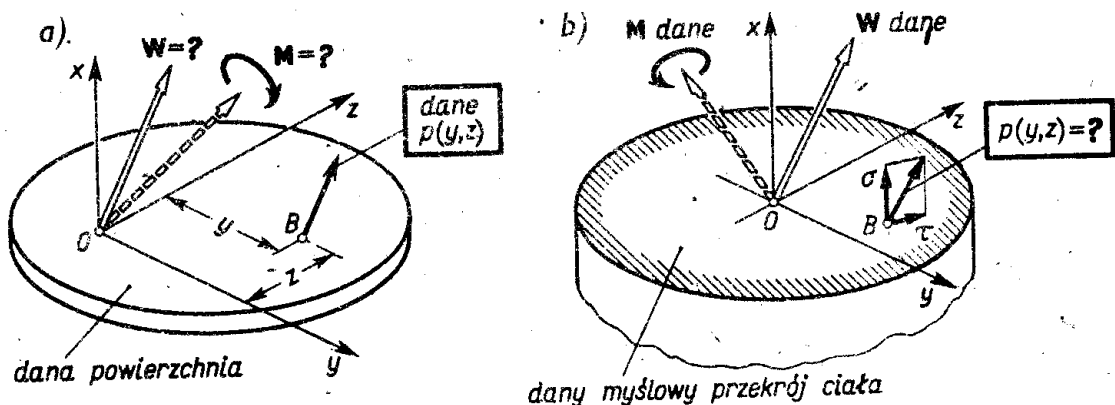
Należy zaznaczyć, że **definiowanie naprężenia jako wektora w danym punkcie ciała jest dopuszczalne tylko wtedy, gdy myślowy przekrój traktujemy jako stały, to znaczy nie dopuszczamy innego poprowadzenia przecięcia przez ten punkt**. Jeśli to ograniczenie usunąć (rys. 1.9), to otrzymamy różne wypadkowe naprężenia p' , p'' , p''' i różne ich składowe σ' , ..., τ''' . Jest to oczywiste, gdyż różnym przekrojom towarzyszy przecinanie (myślowe) różnych więzów łączących punkt B z otoczeniem, przy czym siły w tych więzach mogą być bardzo różne. Ponieważ przez dany punkt B można poprowadzić nieskończenie



Rys. 1.9. Odmienność naprężeń zależnie od sposobu przecięcia

wiele różnych przekrojów, zatem w wyniku mamy całą mnogość różnych wektorów p tworzących tzw. *stan napięcia w danym punkcie B*. Analiza tego stanu podana jest w rozdz. 7.

Określenie wartości σ i τ w poszczególnych punktach przekroju jest podstawowym zadaniem w wytrzymałości materiałów. Jest ono w pewnym sensie odwrotne do znanego



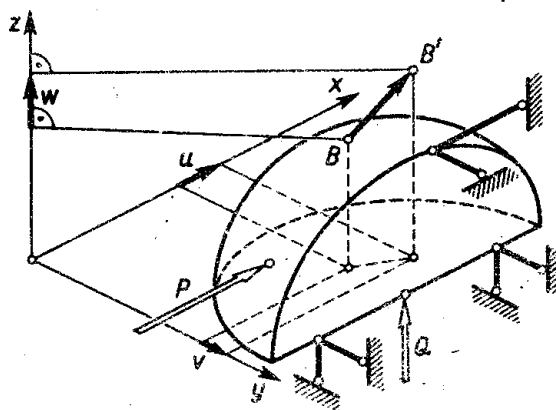
Rys. 1.10. Ilustracja podstawowego zadania wytrzymałości

z mechaniki ogólnej szukania nieznannej wypadkowej siły W i momentu M dla znanych obciążeń $p(y, z)$ rozłożonych w sposób ciągły na danej powierzchni (rys. 1.10a). W wytrzymałości materiałów *znamy wysilek przekroju*, tj. wypadkowe W i M (rys. 1.10b),

a szukamy $p(y, z)$ pod postacią jego składowych $\sigma(y, z)$ i $\tau(y, z)$. Jest rzeczą jasną, że dla rozwiązania tego zadania musimy znać charakter⁽¹⁾ rozkładu σ i τ , inaczej bowiem odpowiedź nie byłaby jednoznaczna. Takie informacje może dać tylko zbadanie odkształceń.

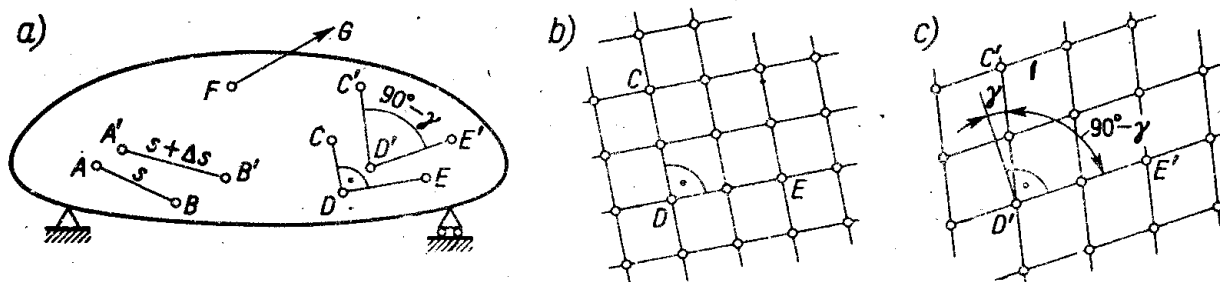
1.6. Definicja przemieszczeń i względnych odkształceń

Przy badaniu odkształceń konieczne jest najpierw określenie ich miary. Zakładamy, że przed obciążeniem badane ciało jest unieruchomione. Po obciążeniu na skutek odkształcalności materiału poszczególne punkty ciała zmieniają swoje położenie, na przykład punkt B zajmie położenie B' (rys. 1.11). Wektor $\overline{BB'}$ łączący pierwotne i końcowe położenie tego



Rys. 1.11. Określenie przemieszczeń: wypadkowego $\overline{BB'}$ i składowych u, v, w

samego punktu ciała nazywamy *przemieszczeniem punktu*. Rzuty tego wektora na stałe osie x, y, z nazywamy składowymi przemieszczeniami punktu i oznaczamy odpowiednio przez u, v i w . Przemieszczenia te są na ogół bardzo małe w porównaniu do wymiarów ciała, znajomość ich jednak jest ważna w zagadnieniach praktycznych.



Rys. 1.12. Definicja względnych odkształceń i kąta odkształcenia postaciowego

Same przemieszczenia nie dają jeszcze obrazu intensywności zmiany wymiarów i postaci w poszczególnych miejscach ciała. Miarę taką otrzymamy badając zmianę, jakiej przy obciążeniu doznaje bądź wybrany odcinek AB , bądź pierwotnie prosty kąt CDE (rys. 1.12a). Jeśli odcinek AB przejdzie po obciążeniu w położenie $A'B'$ zmieniając przy tym swą

⁽¹⁾ Na przykład, że σ jest liniową funkcją y i z , a τ jest prostopadle i proporcjonalne do OB itp.

długość z s na $s + \Delta s$, to intensywność zmiany wymiarów liniowych określimy jako

$$\varepsilon_{sr} = \Delta s / s \quad (a)$$

i nazwiemy ją *średnim względnym wydłużeniem odcinka AB*. Aby lepiej oddać sytuację w bezpośrednim otoczeniu punktu A , skracamy długość s odcinka AB . Graniczna wartość

$$\varepsilon = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{s} \quad (1.5)$$

jest lokalną intensywnością zmiany wymiarów liniowych i nosi nazwę *względnego wydłużenia w punkcie A w obranym kierunku AB*. Widać, że wielkość ε określona jest liczbą oderwaną. Jej wartość jest na ogół małym ułamkiem i dlatego podaje się ją w procentach lub promillach. Jest oczywiste, że określenie wartości ε dla jednego obranego kierunku AB nie daje pełnego obrazu względnych odkształceń w otoczeniu punktu A . Taki obraz otrzymamy, jeśli będą znane wartości ε we wszystkich możliwych kierunkach wychodzących z punktu A .

Drugą niezależną od ε miarą intensywności odkształcenia jest zmiana kąta prostego CDE . Załóżmy, że przed odkształceniem w otoczeniu punktu D atomy znajdują się w węzłach prostokątnej regularnej siatki (rys. 1.12b). Po obciążeniu (rys. 1.12c) zmieniają się na ogół nie tylko odstępów atomów, lecz i postać siatki na ukośnokątną. Ta zmiana postaci oznacza przesunięcie warstw atomów po sobie, tzw. *poślizg*. Okazuje się, że zmiana sił międzyatomowych towarzysząca poślizgowi jest tego samego rzędu co i zmiana sił przy zmianie odległości atomów. Miarą tego poślizgu jest kąt γ przedstawiający *zmniejszenie kąta pierwotnie prostego*. Kąt γ może być między różnymi warstwami atomów różny, aby więc ściśle oddać lokalny poślizg, należy ramiona CD i DE wziąć jak najkrótsze. Dla materiału jednorodnego odpowiada to przejściu do granicy

$$\gamma = \lim_{\substack{CD \rightarrow 0, \\ DE \rightarrow 0}} (\sphericalangle CDE - \sphericalangle C'D'E'). \quad (1.6)$$

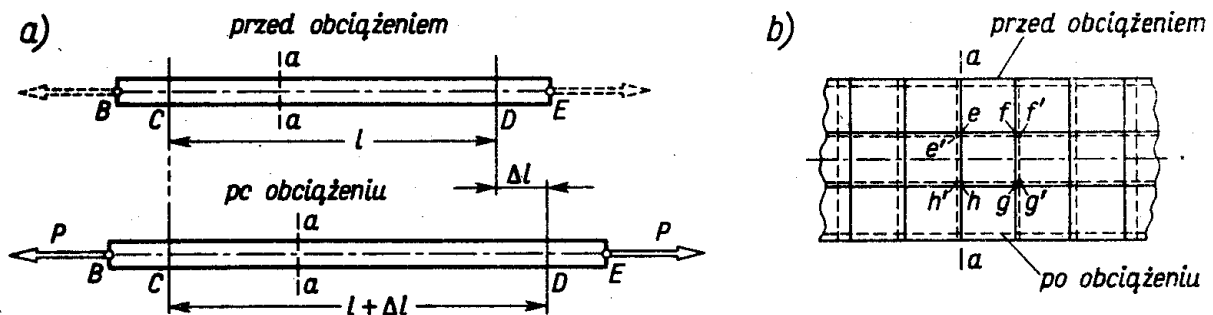
Tak określony kąt γ nazywamy *odkształceniem postaciowym*. Kąt ten wyrażamy w radianach. Podobnie jak i ε jest on liczbą oderwaną tego samego rzędu co i ε .

Pełny obraz odkształceń postaciowych w otoczeniu danego punktu D otrzymamy, gdy będą znane kąty γ przy wszystkich możliwych (w przestrzeni) ustawieniach ramion CD i DE . Przez analogię do stanu napięcia (art. 1.5) *stanem odkształcenia* w danym punkcie nazwiemy całą mnogość wartości ε i γ odpowiadających całej mnogości kierunków i położeń pierwotnie prostego kąta związanych z tym punktem. Analizę tego stanu podano w rozdz. 7.

1.7. Prawo Hooke'a w przypadku rozciągania

Wprowadzone pojęcia naprężeń i względnych odkształceń są od siebie zależne. Tę zależność prześledzimy na przykładzie najprostszego zagadnienia wytrzymałości materiałów. Jest nim rozciąganie pryzmatycznego pręta zachodzące wtedy, gdy pręt ten obciążony jest na końcach dwiema przeciwnymi siłami P (rys. 1.13a). W przypadku tym stwier-

dzono *doświadczalnie*, że oś pręta zostaje prosta, pręt zwiększa swą długość i pomiarowy odcinek CD o długości l ma po obciążeniu długość $l + \Delta l$. Ponadto zaobserwowano, że narysowana na bocznej powierzchni pręta prostokątna siatka o bokach odpowiednio równoległych i prostopadłych do osi pręta (rys. 1.13b) zostaje po obciążeniu prostokątna, nie zmienia swej orientacji względem osi pręta, zmienia natomiast swe wymiary i to nie tylko w kierunku wzdłużnym, lecz i poprzecznym. Okazuje się, że jednakowe przed obciążeniem oczka siatki zmieniają się tak samo. Ustalono również, że w pewnych granicach



Rys. 1.13. Odształcenia pryzmatycznego pręta rozciąganego

a) obraz pręta przed odształceniem i po odształceniu; b) obraz deformacji bocznej powierzchni pręta.

obciążeń dla większości materiałów konstrukcyjnych wydłużenie Δl jest proporcjonalne do obciążenia P i długości l , odwrotnie proporcjonalne do pola A poprzecznego przekroju pręta, nie zależy natomiast od postaci przekroju (koło, prostokąt itp.). Ta doświadczalna zależność przy wprowadzonych oznaczeniach ma postać

$$\Delta l = \frac{Pl}{EA} \quad (1.7)$$

i nosi nazwę *wzoru Hooke'a*. Współczynnik proporcjonalności E przy ustalonych warunkach doświadczenia, jak na przykład stałej temperaturze, zależy tylko od rodzaju materiału pręta i nosi nazwę *modułu sprężystości wzdłużnej* lub *modułu Younga*.

Przekształćmy wzór Hooke'a wprowadzając pojęcia naprężenia i względnego wydłużenia. Ponieważ odształcenia jednakowych krętek siatki są jednakowe, zatem względne wydłużenia w kierunku osi pręta są jednakowe na całej długości i są równe

$$\varepsilon = \Delta l / l, \quad (1.8)$$

bez potrzeby stosowania wzoru (1.5). Wzór (1.8) określa ε dla każdego wzdłużnego elementu pręta⁽¹⁾. Wynika stąd, że wszystkie te elementy znajdują się w jednakowych warunkach. Wobec tego intensywność sił wewnętrznych, czyli naprężenie, jest we wszystkich punktach przekroju $a-a$ to samo i ma wartość σ (rys. 1.14a). Elementarne siły wewnętrzne są σdA , a ich wypadkowa N_a jest siłą normalną do przekroju, równą

$$N_a = \sum \sigma dA = \sigma \sum dA = \sigma A, \quad (a)$$

⁽¹⁾ Gdyby odształcenia ε w rdzeniu pręta były inne niż na powierzchni bocznej, wówczas kształt przekroju musiałby mieć wpływ na Δl . Faktu takiego nie obserwuje się w doświadczeniach.

i przechodzi przez środek ciężkości przekroju. Z drugiej strony siła N_a , jako wysiłek przekroju, utrzymuje w równowadze myślowo odciętą część pręta i musi być równa P . Stąd otrzymujemy

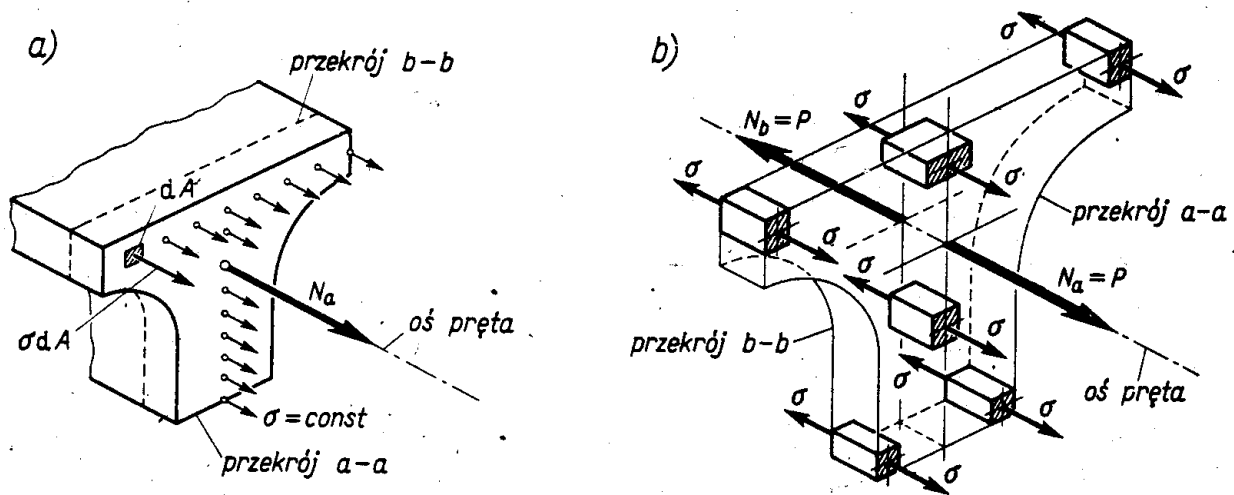
$$\sigma = \frac{N_a}{A} = \frac{P}{A} \quad (1.9)$$

jako wartość normalnych naprężeń przy rozciąganiu.

Wstawiając (1.8) i (1.9) do (1.7) otrzymujemy *prawo Hooke'a*

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{lub} \quad \sigma = E\varepsilon, \quad (1.10)$$

wyrażające ogólną zależność fizyczną oderwaną od wymiarów pręta. Sens tego prawa zrozumiemy rozpatrując plasterkę pręta (rys. 1.14b) wycięty poprzecznymi przekrojami



Rys. 1.14. Określenie naprężeń przy rozciąganiu

$a-a$ i $b-b$ i podzielony wzdłużnie na szereg kostek. Każda kostka ma wydłużenie ε w kierunku prostopadłym do tych ścian, na których istnieją naprężenia normalne σ . W takim ujęciu wielkości σ i ε nie wiążą się z prętem, lecz z elementarną kostką i pewnym jej przekrojem⁽¹⁾ (ściana). Uwzględniając ponadto, że wzór Hooke'a słuszny jest tylko w pewnych granicach obciążeń, prawo Hooke'a wyrazimy mówiąc, że w pewnym zakresie wartość naprężenia normalnego do przekroju jest proporcjonalna do wartości względnego wydłużenia w kierunku prostopadłym do tego przekroju.

Z wzoru (1.10) widać, że moduł Younga E wyrażony jest w tych samych jednostkach co i naprężenie σ , a więc w MPa (lub kG/cm^2). Tenże wzór daje możliwość wyznaczenia modułu Younga, jeśli z doświadczenia (według schematu z rys. 1.13) znane są odpowiadające sobie wartości σ i ε . Niektóre wartości modułu E podaje tabl. 1.1.

Zależności (1.7)÷(1.10) słuszne są również przy ścisaniu pryzmatycznego pręta, gdy siły wzdłużne P (rys. 1.13) działają nie na zewnątrz, lecz do wewnątrz pręta. W takim

⁽¹⁾ To jest powód innego nazwania zależności (1.7) i (1.10).

przypadku następuje skrócenie o Δl odcinka CD oraz skrócenie względne ε , które traktujemy jako wartości ujemne. Podobnie jako ujemne traktujemy siłę ściskającą $N_s = P$ i naprężenie σ , których zwroty są przeciwne niż na rys. 1.14a. Moduł Younga przy ściskaniu dla większości materiałów ma tę samą wartość co i przy rozciąganiu.

Tablica 1.1

Mechaniczne własności materiałów⁽¹⁾
(wybrane przykładowo)

Material	E MPa	ν	R_e MPa	R_m MPa	a_5 %
stal ⁽²⁾ St 3 S (~0,18% C, ~0,5% Mn)	$2,06 \cdot 10^5$	0,29	235	370 ÷ 460	25
stal sprężynowa ⁽³⁾ 60 SGH	$2,08 \cdot 10^5$	0,30	~1250	~1400	7
stop Al-Cu (dural D 16)	$7,0 \cdot 10^4$	0,34	320	460	17
stop Cu-Sn (brąz — pręty walc.)	$1,0 \div 1,1 \cdot 10^5$	0,32	350	480	11
szkło potasowe (zwykle)	$6,0 \div 6,5 \cdot 10^4$	0,23	—	70 ÷ 90	~0
bakelit (żywica fenol*formald.)	$3,5 \div 4,0 \cdot 10^3$	0,37	—	80	—

⁽¹⁾ W układzie jednostek SI: 1 MPa = 1 Megapaskal = 10^6 N/m² \approx 10,19 kG/cm².

⁽²⁾ Według PN-72/H-84020.

⁽³⁾ Według PN-65/H-84032.

Na zakończenie omówimy kwestię odkształceń w kierunku prostopadłym do osi pręta. Doświadczenia wykazują, że przy rozciąganiu poprzeczne elementy prostopadłe do osi pręta ulegają skróceniom, a pręt zwęża się w kierunku poprzecznym. Jeśli z tych skróceń obliczyć względne skrócenia ε_p , to okazuje się, że dla materiałów izotropowych są one jednakowe we wszystkich kierunkach prostopadłych do osi pręta. Stwierdzono, że *gdy słuszne jest prawo Hooke'a, wówczas ε_p jest proporcjonalne do ε* . Te fakty doświadczalne ujmujemy w zależność

$$\varepsilon_p = -\nu\varepsilon = -\nu \frac{\sigma}{E}, \quad (1.11a)$$

gdzie ν — współczynnik proporcjonalności, tzw. *liczba Poissona*, a znak minus wyraża, że ε_p i ε są przeciwnych znaków. Sens tej zależności jest podobny do podanego przy oma-

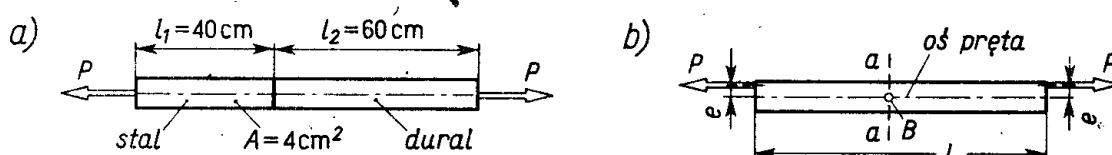
wianiu prawa Hooke'a i polega na stwierdzeniu, że każda elementarna kostka poddana na dwóch swych ścianach działaniu naprężeń σ (rys. 1.14b) doznaje skrócenia ν w dowolnym kierunku prostopadłym do tych naprężeń. Wartości ν , jak widać z tabl. 1.1, są dla materiałów uważanych za izotropowe zawarte w przedziale

$$0 < \nu < 0,5. \quad (1.11b)$$

Zadania

1. Rozciągany pryzmatyczny pręt ($A = 4 \text{ cm}^2$) wykonany ze stali niskowęglowej wykazuje wydłużenie $\varepsilon = 0,25\%$. Jakie jest naprężenie w pręcie i jaka jest siła rozciągająca pręt?

Odp. $\sigma = E\varepsilon = 2,06 \cdot 10^5 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3} = 51,5 \text{ MPa} = 525 \text{ kG/cm}^2$, $P = \sigma A = 51,5 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2 \times 4 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 20600 \text{ N} = 20,6 \text{ kN}$.



Rys. 1.15.

2. Pryzmatyczny pręt (rys. 1.15a) rozciągany siłami $P = 40 \text{ kN}$ składa się z odcinka stalowego (s) i duralowego (d). Wyznaczyć w każdym z odcinków naprężenia normalne, wydłużenie względne i całkowite wydłużenie pręta.

Odp. $\sigma_s = \sigma_d = 10^2 \text{ MPa} = 1020 \text{ kG/cm}^2$, $\varepsilon_s = 0,48 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon_d = 1,43 \cdot 10^{-3}$, $\Delta l = \varepsilon_s l_1 + \varepsilon_d l_2 = 1,05 \cdot 10^{-1} \text{ cm} = 1,05 \text{ mm}$?

3. Jaki jest moduł sprężystości i liczba Poissona materiału pręta o przekroju kwadratowym ($A = 4 \text{ cm}^2$), który przy osiowym ściskaniu siłą $P = 60 \text{ kN}$ skrócił się na długości $l = 10 \text{ cm}$ o $\Delta l = 0,210 \text{ mm}$, a którego bok kwadratu wydłużył się o $0,014 \text{ mm}$?

Odp. $\sigma = -150 \text{ MPa} = -1530 \text{ kG/cm}^2$, $\varepsilon = -2,10 \cdot 10^{-3}$, $E = \sigma/\varepsilon = 7,15 \cdot 10^4 \text{ MPa}$, $\nu = 0,70 \cdot 10^{-3}$, $\nu = -\varepsilon_p/\varepsilon = 0,33$.

4. Pryzmatyczny pręt obciążono siłami P przyłożonymi mimośrodowo (rys. 1.15b). Udowodnić, że rozkład naprężeń normalnych σ w przekroju $a-a$ nie może być równomierny.

Odp. Przy $\sigma = \text{const}$ wysiłek przekroju jest siłą normalną N_a . Siła N_a i mimośrodowa siła P dają równowagi (niezrównoważony moment Pe). Założenie $\sigma = \text{const}$ jest więc błędne.

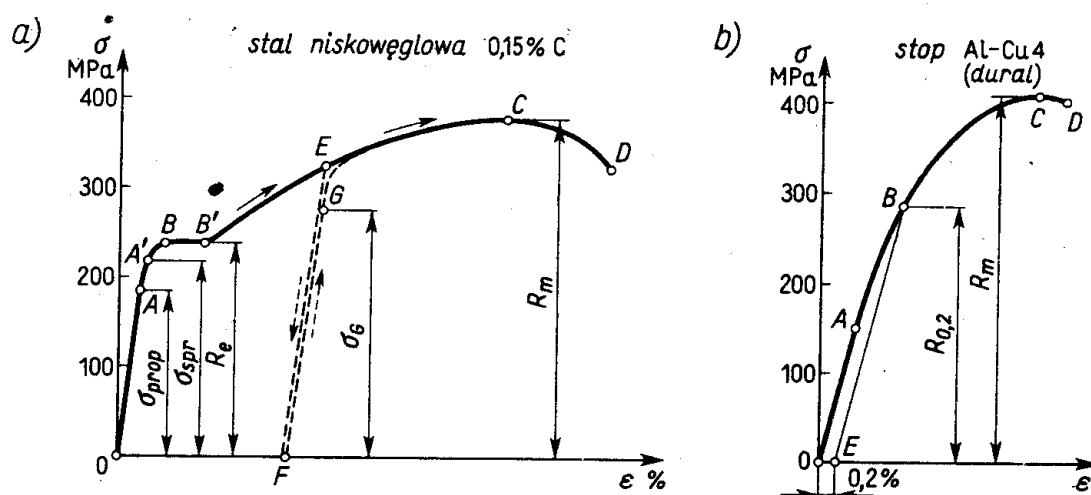
1.8. Wykres rozciągania

Jak wynika z doświadczeń nad rozciąganiem materiałów, prawo Hooke'a można stosować tylko do pewnej wartości naprężeń σ_{prop} , tzw. *granicy proporcjonalności*, zależnej od rodzaju materiału. Przy naprężeniach większych od σ_{prop} zależność $\sigma = f(\varepsilon)$ staje się nieliniowa, a mianowicie naprężenie σ przyrasta wolniej, niżby to wynikało z prawa Hooke'a.

Całą zależność $\sigma = f(\varepsilon)$ przedstawiamy zazwyczaj w postaci wykresu. Dla stali niskowęglowej ($0,15 \div 0,25\%$ C) wykres taki⁽¹⁾ ma postać według rys. 1.16a. Poza punktem A

⁽¹⁾ Na tym wykresie podziałka ε nie jest równomierna. Orientacyjne odcięte punktów A, B, B', C są $\varepsilon_A \approx 1\%$, $\varepsilon_B \approx 2 \div 3\%$, $\varepsilon_{B'} \approx 15 \div 25\%$, $\varepsilon_C \approx 180\%$.

odpowiadającym granicy proporcjonalności, drugim charakterystycznym punktem jest punkt B , w którym odkształcenie ε wzrasta przy $\sigma = \text{const} = R_e$. Wartość R_e nazywa się *granica plastyczności*, a samo zjawisko wzrostu ε przy $\sigma = \text{const}$ jest tzw. *plynięciem materiału*. Wiąże się ono ze zmianami mikrostruktury materiału w postaci mikroskopijnych poślizgów nie znikających po odciążeniu i dających w wyniku wydłużenie trwałe (plastyczne). Gdy $\sigma = \sigma_{\text{prop}}$, poślizgi te są bardzo rzadkie, ich liczba jednak gwałtownie, a nawet lawinowo, rośnie, w miarę gdy $\sigma \rightarrow R_e$. Pojawienie się odkształceń trwałych jest więc procesem postępującym stopniowo. Z tego powodu *granica sprężystości* σ_{spr} , czyli ta wartość naprężenia, przy której nie ma jeszcze odkształceń trwałych, jest pojęciem umownym. Zależy ona od dokładności pomiaru⁽¹⁾ i rzadko kiedy jest podawana w tablicach. W odróżnieniu od tego granica plastyczności, jako wyraźnie zaznaczona, podawana jest powszechnie (tabl. 1.1).



Rys. 1.16. Typowe wykresy rozciągania

Tworzenie się poślizgów w pewnym ich stanie doznaje zahamowania. Jest to tzw. *umocnienie materiału* (odcinek $B'C$), w którym dla zwiększenia ε trzeba również zwiększyć σ . Tempo wzrostu σ , tj. wartość $d\sigma/d\varepsilon$, jest tu znacznie (kilkaset razy) mniejsze niż na odcinku OA . Szczytowe naprężenie R_m (punkt C) nazywamy *doraźną wytrzymałością* materiału (tabl. 1.1). Należy zaznaczyć, że wydłużenie ε aż do tej fazy próby (punkt C) jest równomierne dla całego pręta (próbki). Tę samą cechę ma też gęstość poślizgów nie wykazująca żadnej wyraźnej koncentracji. Począwszy od punktu C (odcinek CD) następuje koncentracja poślizgów w jednym miejscu próbki, czemu towarzyszy pojawienie się lokalnego przewężenia (szyjki), kończące się zerwaniem próbki (punkt D).

W przedziale trwałych odkształceń ($R_e < \sigma < R_m$) występuje ciekawe zjawisko *podniesienia granicy sprężystości*. Jeśli mianowicie proces obciążania przerwać w punkcie E ($\sigma > R_e$), to proces odciążania przebiega po linii prostej EF równoległej do OA . Całkowitemu odciążeniu ($\sigma = 0$) odpowiada trwałe odkształcenie OF . Powtórzonemu obciążeniu tego pręta odpowiada ta sama linia FE , niemal aż do punktu E , po czym dalszy przebieg

⁽¹⁾ To samo dotyczy σ_{prop} . Umowność tych pojęć znalazła odzwierciedlenie w normach, na przykład w normie PN Polskiego Komitetu Normalizacyjnego pt. *Ścisła próba rozciągania*.

$\sigma = f(\epsilon)$ jest po tej samej linii ECD , jaka byłaby bez tej całej operacji przerywania i wznowienia obciążenia. Jeśli powtórnego obciążenia nie doprowadzać aż do punktu E , lecz przerwać je w punkcie G , to okazuje się, że po zdjęciu obciążenia materiał wraca znowu do stanu F . Innymi słowy materiał w przedziale naprężeń O, σ_G ($\sigma_G > \sigma_{spr}$) zachowuje się jak materiał sprężysty i na tym właśnie polega wspomniane zjawisko. Jest ono szeroko wykorzystywane w technice.

Dla większości metali i ich stopów wykres rozciągania nie ma wyraźnej granicy plastyczności (rys. 1.16b). W takim przypadku jako *umowną granicę plastyczności* $R_{0,2}$ przyjmuje się to naprężenie, przy którym trwałe odkształcenie $\epsilon_{trwale} = 0,2\%$. Uzasadnieniem takiej umowy jest to, że przy $\epsilon_{trwale} = 0,2\%$ obraz zmian mikrostruktury jest podobny do obrazu zmian w materiale mającym wyraźną granicę R_e . Punkt B reprezentujący $R_{0,2}$ odpowiada przecięciu linii EB równoległej do OA z linią wykresu, przy czym $OE = \epsilon_{trwale} = 0,2\%$.

Jak powiedziano w art. 1.7, wydłużeniu w kierunku osi pręta towarzyszy skrócenie w kierunku poprzecznym. Zjawisko to obserwujemy również, gdy $R_e \leq \sigma \leq R_m$. Okazuje się, że we wszystkich materiałach izotropowych przyrostowi $\Delta\epsilon$ wydłużenia towarzyszy jednakowy przyrost $\Delta\epsilon_p$ skrócenia poprzecznego

$$\Delta\epsilon_p \approx -0,5 \Delta\epsilon \quad (1.12)$$

Innymi słowy w zakresie odkształceń plastycznych liczba Poissona jest $\nu \approx 0,5$. To skrócenie ϵ_p powoduje zmianę pola A przekroju. Zmiana ta, gdy $\sigma \leq R_e$, jest jednak mała i dlatego w obliczeniach przyjmujemy A równe pierwotnemu polu przekroju.

Podobne jak przy rozciąganiu wykresy $\sigma(\epsilon)$ otrzymujemy w przypadku ściskania. Dla większości metali i ich stopów wielkości charakterystyczne σ_{prop} , σ_{spr} i R_e mają te same wartości co i przy rozciąganiu. Odstępstwo od tego wykazują materiały o mniejszej jednorodności (żeliwo), o budowie łańcuchowej (sztuczne żywice), bądź materiały, które przy rozciąganiu nie wykazują odkształcenia plastycznego (cement, cegła).

Szczegółowe informacje w omawianym przedmiocie podają podręczniki materiałoznawstwa bądź podręczniki badania własności mechanicznych. Jest to uzasadnione, albowiem postać i wartości wykresu $\sigma(\epsilon)$ zależą bardzo od składu materiału i od procesów technologicznych zmieniających jego mikrostrukturę (walcowanie, obróbka cieplna itp.).

1.9. Współczynnik bezpieczeństwa

Opisując zjawiska w różnych fazach rozciągania uczyniono z naprężenia σ miernik, którego wartość w stosunku do σ_{prop} , σ_{spr} , R_e lub R_m mówi o tym, czy jakieś zjawisko wystąpiło, czy nie. Z tego powodu jest racjonalne, aby tym samym miernikiem, tj. wartością naprężenia, objąć również zagadnienie bezpieczeństwa. Przez analogię do takich pojęć, jak σ_{prop} , σ_{spr} , wprowadzamy pojęcie *naprężenia dopuszczalnego*, jako maksymalnej wartości naprężenia, która gwarantuje bezpieczną jeszcze pracę konstrukcji.

Podstawowym warunkiem bezpieczeństwa jest to, żeby w rzeczywistych warunkach

pracy konstrukcja nie miała odkształceń trwałych, czyli żeby była sprężysta⁽¹⁾. Oznacza to, że w konstrukcji pracującej na rozciąganie można by przyjąć wartość naprężeń dopuszczalnych równą σ_{prop} . Tak byłoby w idealnym przypadku, gdyby ściśle były znane naprężenia występujące w czasie pracy oraz właściwości materiału. W rzeczywistości tak nie jest. Obciążenia zewnętrzne nigdy prawie nie są dokładnie znane (na przykład ciśnienie spalania w cylindrze silnika). Ponadto właściwości materiału wykazują pewien rozrzut. Z tych i innych nie wymienionych powodów przyjmujemy w praktyce naprężenia dopuszczalne mniejsze od σ_{prop} . Ponieważ jednak wyznaczenie granicy proporcjonalności nie jest łatwe, a sama wartość jej jest umowna, utarło się wyrażać naprężenia dopuszczalne k_r jako pewien ułamek wartości R_e bądź R_m , czyli tych wielkości, które łatwo można doświadczalnie określić. W formie wzoru wyrażamy to, jak następuje:

$$k_r = \frac{R_e}{n_e} \quad \text{lub} \quad k_r = \frac{R_m}{n_m}, \quad (1.13)$$

gdzie liczby n_e , n_m są większe od jednośc i nazywają się współczynnikami bezpieczeństwa odniesionymi odpowiednio do R_e bądź do R_m . Dla metali plastycznych, a w szczególności dla stali, bardziej uzasadnione jest stosowanie współczynnika n_e oceniającego bezpieczeństwo w stosunku do zjawisk wystąpienia wyraźnych trwałych odkształceń niedopuszczalnych w praktyce. Dla materiałów kruchych (żeliwo) używa się współczynnika n_m .

Liczbowa wartość n_e czy n_m , zależy od dokładności, z jaką znane są obciążenia zewnętrzne, stopnia jednorodności materiału, charakteru obciążeń (stałe czy zmienne w czasie), a także od czynników innej natury, jak jakość technologii, warunki użytkowania. Wszystkie te czynniki zależą od rodzaju maszyny, inne są bowiem warunki pracy turbiny parowej, a inne koparki, samochodu czy samolotu. Z tego punktu widzenia wartości współczynników bezpieczeństwa podawane w wykładach części maszyn, bądź innych specjalnych wykładach, należy traktować jako gwarancję bezpieczeństwa opartą na inżynierskiej tradycji i praktycznych doświadczeniach. W wytrzymałości materiałów traktujemy wartości współczynników n_e i n_m jako dane.

Podane wzorem (1.13) pojęcie współczynnika bezpieczeństwa stosuje się, ściśle biorąc, tylko do rozciągania lub ściskania pryzmatycznego pręta. W praktyce pojęcie to zostało ekstrapolowane na przypadki bardziej złożone, gdy naprężenia są w różnych miejscach ciała różne. Tok postępowania polega na wyszukaniu w ciele takiego miejsca, w którym działają naprężenia ekstremalne i porównaniu ich z wartością, która na podstawie badań laboratoryjnych jest uznana za dopuszczalną. Taka metoda, szeroko stosowana dzięki swej prostocie, nazywa się metodą naprężeń dopuszczalnych. Jest ona oparta na założeniu, że o bezpieczeństwie całej konstrukcji decyduje wartość naprężenia w jednym jej miejscu. Założenie to jest dyskusyjne. Istnieją bowiem liczne przypadki, gdy ściśle trzymanie się tego założenia dawałoby niepotrzebne przewymiarowanie konstrukcji. W szczególności dotyczy to lokalnego spiętrzenia naprężeń (rozd. 17).

Ten ostatni fakt dał impuls do oceny bezpieczeństwa tzw. metodą obciążenia niszczącego. W metodzie tej określa się na drodze teoretycznej lub doświadczalnej wartość P_{gr} obciąż-

⁽¹⁾ Jest to warunek wystarczający dla obciążeń stałych (np. ciężar konstrukcji). Gdy obciążenia są zmienne, warunek ten jest konieczny, lecz niewystarczający (rozd. 17).

żenia powodującą zniszczenie konstrukcji i porównuje się ją z wartością P_{rob} obciążenia w rzeczywistych warunkach pracy. Stosunek

$$n^* = \frac{P_{gr}}{P_{rob}} \quad (1.14)$$

daje miarę pewności ustroju. Słabym punktem tej metody jest trudność określenia P_{gr} w bardziej złożonych konstrukcjach.

Zadania

1. Pręt (rys. 1.13a) obciążony siłami $P = 40$ kN wykonany jest ze stali o $R_e = 240$ MPa. Wyznaczyć niezbędne pole A_{min} przekroju, jeśli współczynnik $n_e = 1,5$.

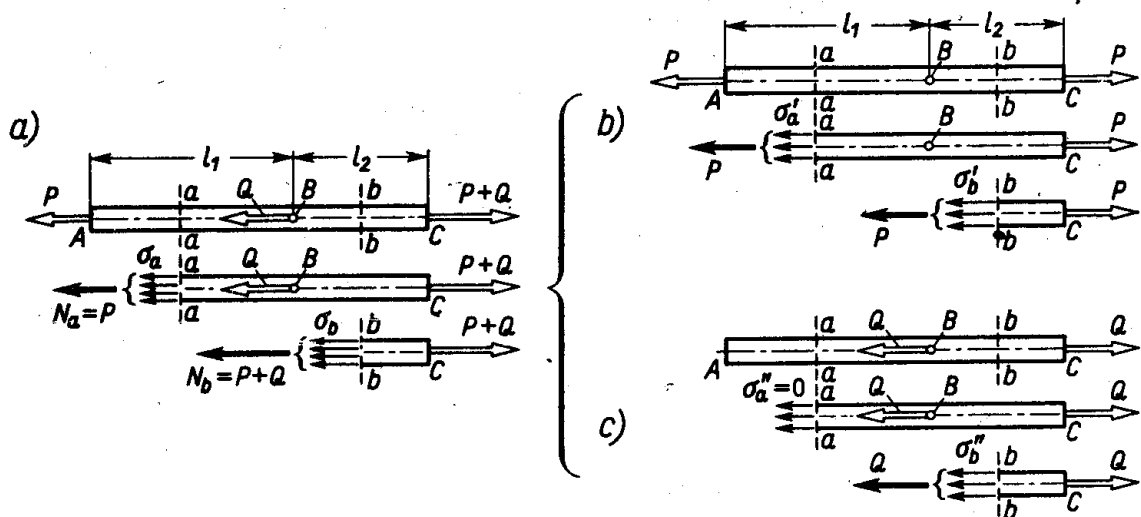
Odp. $k_r = R_e/n_e = 160$ MPa, $A_{min} = P/k_r = 2,5$ cm².

2. Jaki jest współczynnik bezpieczeństwa pręta (zad. 2, art. 1.7), jeśli $(R_e)_{stal} = 240$ MPa, $(R_e)_{dural} = 280$ MPa?

Odp. $(n_e)_{stal} = 2,4$, $(n_e)_{dural} = 2,8$, skąd $(n_e)_{pręt} = (n_e)_{stal}$.

1.10. Zasada superpozycji

Rozważmy pryzmatyczny pręt obciążony wzdłużnie siłami P i Q zrównoważonymi siłą $P+Q$ (rys. 1.17a). Widzimy, że pręt jako całość jest rozciągany. Siły normalne N_a i N_b



Rys. 1.17. Elementarne wyjaśnienie zasady superpozycji

przedstawiające wysiłek przekroju $a-a$ i przekroju $b-b$ są

$$N_a = P \quad \text{oraz} \quad N_b = P + Q \quad (a)$$

a odpowiadające im naprężenia normalne

$$\sigma_a = P/A, \quad \sigma_b = (P+Q)/A. \quad (b)$$

Ponadto odkształcenia względne na odcinkach AB i BC są

$$\varepsilon_a = \sigma_a/E = P/EA, \quad \varepsilon_b = \sigma_b/E = (P+Q)/EA, \quad (c)$$

a przemieszczenia punktów A i B przy obiorze punktu C jako nieruchomego

$$\left. \begin{aligned} u_A &= \Delta l_{AB} + \Delta l_{BC} = \varepsilon_a l_1 + \varepsilon_b l_2 = (P l_1 / EA) + [(P + Q) l_2 / EA], \\ u_B &= \Delta l_{BC} = (P + Q) l_2 / EA. \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Widać, że wszystkie te zależności są liniowe względem P i Q , czyli że

$$\Psi = \alpha_P P + \alpha_Q Q, \quad (e)$$

gdzie Ψ — pewna wielkość fizyczna (siła normalna, wydłużenie itd.) wywołana w danym miejscu ciała jednoczesnym działaniem sił P i Q stanowiących obciążenie, a α_P i α_Q — odpowiednie *stałe współczynniki*. Gdy na przykład utożsamić Ψ z siłą N_b , wówczas z porównania (a) i (e) mamy; $\alpha_P = 1$, $\alpha_Q = 1$, a jeśli $\Psi = u_A$, to

$$\alpha_P = (l_1 + l_2) / EA, \quad \alpha_Q = l_2 / EA.$$

Widać, że te tzw. *współczynniki wpływowe* α_P i α_Q zależą od:

- 1) fizycznego charakteru Ψ (naprężenie, przemieszczenie itp.);
- 2) miejsca, gdzie wielkość Ψ jest badana (przykładowo punkty A , B);
- 3) przyczyny wywołującej powstanie Ψ (przykładowo siły P lub Q);
- 4) wymiarów ciała i własności materiału (parametry A , E).

Ich fizyczny sens widać z wzoru (e). Są to mianowicie wielkości Ψ przy *oddzielnym działaniu jednostkowych obciążeń* P lub Q .

Zademonstrowana liniowa zależność (e) między wielkością Ψ , którą ogólnie nazwiemy *skutkiem*, a obciążeniem nie jest wyjątkiem. Liczne doświadczenia nad zachowaniem się ciał stałych (konstrukcji) pokazują, że w ogromnej większości przypadków skutek Ψ jest liniową funkcją obciążenia złożonego z P_1, P_2, \dots, P_n , czyli

$$\Psi = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_n P_n. \quad (1.15)$$

Dla takich ciał (ustrojów), zwanych odtąd *liniowymi*, słuszna jest *zasada superpozycji*, lub, inaczej, *niezależności działania obciążeń*. Zauważmy bowiem, że składniki $\alpha_1 P_1, \alpha_2 P_2, \dots$ przedstawiają odpowiednio skutki $\Psi_1 = \alpha_1 P_1, \Psi_2 = \alpha_2 P_2, \dots$ działania oddzielnie obciążeń prostych P_1, P_2, \dots składających się na całe obciążenie. Skutek wypadkowy Ψ przy obciążeniu złożonym jest algebraiczną sumą skutków Ψ_1, Ψ_2, \dots wywołanych działaniem obciążeń składowych i nie zależy od kolejności poszczególnych obciążeń składowych.

Podstawowym warunkiem stosowalności zasady superpozycji jest *sprężystość materiału*. Jeśli bowiem ciało (ustrój) obciążyć układem sił P_1, \dots, P_n , a następnie odciążyć tak, że $P_1 = P_2 = \dots = P_n = 0$, to w końcowej fazie $\Psi = 0$, czyli że ustrój wraca ściśle do stanu początkowego, co właśnie jest definicją sprężystości. Warunek ten jest spełniony w ogromnej większości zagadnień wytrzymałości materiałów i wtedy zastosowanie superpozycji ułatwia rozwiązanie. I tak zamiast badać łączne działanie sił P i Q możemy oddzielnie zbadać działanie sił P (rys. 1.17b), oddzielnie sił Q (rys. 1.17c) i wyniki tych dwóch prostszych zadań zsumować algebraicznie. Dla przykładu naprężenia w przekrojach $a-a$ i $b-b$ są:

$$\text{od sił } P: \quad \sigma'_a = P/A, \quad \sigma'_b = P/A, \quad \text{od sił } Q: \quad \sigma''_a = 0, \quad \sigma''_b = Q/A,$$

a po ich zsumowaniu otrzymujemy wyniki (b).

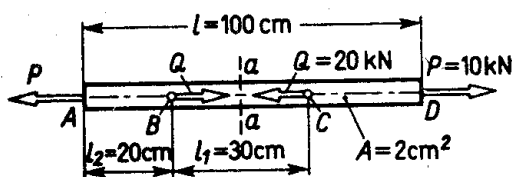
Zadania

1. Metodą superpozycji wyznaczyć wartość na reżen w przekroju $a-a$, wydłużenie całego pręta AD i jego odcinka BC (rys. 1.18), jeśli $E = 1,1 \cdot 10^5$ MPa.

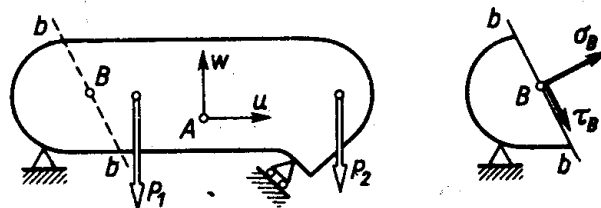
Odp. $\sigma_a = -50$ MPa, $\Delta l_{AD} \approx 0,18$ mm, $\Delta l_{BC} \approx -0,14$ mm.

2. Przy kolejnym działaniu sił $P_1 = 1$ kN i $P_2 = 0,5$ kN pionowe przemieszczenia punktu A danego ustroju (rys. 1.19) są odpowiednio $w'_A = -0,15$ cm i $w''_A = 0,10$ cm. Określić pionowe przemieszczenie punktu A : a) przy jednoczesnym działaniu sił P_1 i P_2 , b) przy jednoczesnym działaniu $P_1 = 3$ kN i $P_2 = 1$ kN.

Odp. a) $w_A = -0,05$ cm (tzn. do dołu); b) $w_A = -0,25$ cm.



Rys. 1.18.



Rys. 1.19.

3. W ustroju z zadania 2 poziome przemieszczenia punktu A przy kolejnym działaniu sił $P_1 = 1$ kN i $P_2 = 0,5$ kN są odpowiednio $u'_A = 0,05$ cm, $u''_A = 0,03$ cm. Wykorzystując wyniki zadania 2 określić całkowite przemieszczenie punktu A (w płaszczyźnie rysunku), gdy jednocześnie działają: a) $P_1 = 1$ kN i $P_2 = 0,5$ kN; b) $P_1 = 3$ kN i $P_2 = 1$ kN.

Rozwiązanie. W przypadku (a) całkowite przemieszczenia: poziome $u_A = 0,08$ cm, a pionowe (z zadania 2) $w_A = -0,05$ cm. Przemieszczenie wypadkowe $\sqrt{u_A^2 + w_A^2} = 0,094$ cm. W przypadku (b) $u_A = 0,21$ cm i całkowite przemieszczenie 0,33 cm.

4. W punkcie B przekroju $b-b$ (rys. 1.19) pomierzono naprężenia $\sigma'_B = 30$ MPa i $\tau'_B = 10$ MPa wywołane siłą $P_1 = 1$ kN oraz $\sigma''_B = -10$ MPa, $\tau''_B = 15$ MPa wywołane siłą $P_2 = 0,5$ kN. Wyznaczyć naprężenia σ_B i τ_B oraz całkowite naprężenie p przy jednoczesnym działaniu $P_1 = 2$ kN, $P_2 = 0,5$ kN.

Odp. $\sigma_B = 50$ MPa, $\tau_B = 35$ MPa, $p_B = \sqrt{\sigma_B^2 + \tau_B^2} \approx 61$ MPa.